Soluções Simulado OBMEP 2017
Nível 2 – 8º e 9º anos do Ensino Fundamental

1. ALTERNATIVA E

Como Ana contribuiu com 43 reais e Aurora com 68 reais, os três livros juntos custaram $43 + 68 = 111$ reais; desse modo, cada livro custou $111 \div 3 = 37$ reais, que é o que cada uma das três colegas deveria ter pago. Logo, Ana deve receber de Alice a quantia de $43 - 37 = 6$ reais e Aurora deve receber de Alice $68 - 37 = 31$ reais. Observamos que Ana vai pagar a Alice e Aurora, no total, a quantia de $6 + 31 = 37$ reais.

2. ALTERNATIVA D

Observe que $2014 = 19\times106 = 2\times19\times53$. Assim, a menos da ordem dos fatores, existem somente quatro formas possíveis de se fazer aparecer 2014 na calculadora como <u>uma</u> multiplicação de dois números naturais:

- Apertando sete teclas: $1\times2014 =$
- Apertando sete teclas: $2\times1007 =$
- Apertando sete teclas: $19\times106 =$
- Apertando seis teclas: $38\times53 =$

(Este fato se deve à decomposição única de um número inteiro positivo em fatores primos, a menos da ordem dos fatores. Os fatores primos de 2014 são 2, 19 e 53).

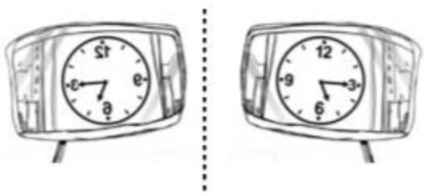
Dentre as quatro possibilidades, em só uma delas seis teclas são pressionadas; concluímos então que as seis teclas que Ana Maria apertou foram 3, 8, x, 5, 3 e $=$. Portanto, o maior algarismo cuja tecla ela apertou foi 8.

3. ALTERNATIVA E

Basta calcular 8% de 250: $\frac{8}{100}\times250 = \frac{2}{25}\times250 = 2\times10 = 20$.

4. ALTERNATIVA A

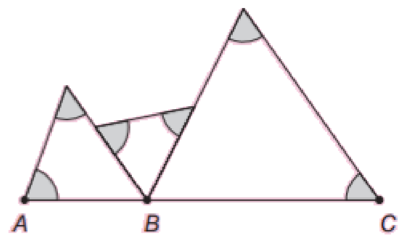
Na imagem que aparece no espelho do Benjamim, o ponteiro dos minutos aponta para o número 3, enquanto que o ponteiro das horas está entre o algarismo 6 e o traço correspondente ao algarismo 5, mais próximo deste último. Deste modo, o relógio marcava 5h 15min.



Outra maneira de enxergar o resultado é imaginar que a imagem que aparece no espelho do Benjamim voltará ao normal se for novamente refletida em um espelho. Fazemos isto na figura ao lado e vemos imediatamente que a hora marcada era 5h 15min.

5. ALTERNATIVA D

A soma dos ângulos internos de um triângulo é $180°$. Observe que os três ângulos não marcados dos triângulos (com vértices em B) somam $180°$, já que A, B e C estão alinhados. Assim, a soma dos ângulos marcados é o $(180°\times3) - 180° = 360°$.



6. ALTERNATIVA A

Ao somar os algarismos das unidades, encontramos $77\times7 = 539$. Logo, o algarismo das unidades da soma é 9 e 53 deve ser adicionado à casa das dezenas. A soma dos algarismos 7 que aparecem nas dezenas é $76\times7 = 532$, que somada a 53 dá 585. Logo, o algarismo das dezenas é 5.

Alternativamente, podemos observar que os algarismos das dezenas e unidades da soma só dependem da soma dos algarismos das unidades e das dezenas das parcelas, ou seja, são os mesmos que os algarismos correspondentes da soma

$$7+\underbrace{77+77+\ldots+77}_{76\ vezes}=7+76\times77=5859$$

logo, o algarismo das dezenas da soma indicada é 9 e o das dezenas é 5.

7. ALTERNATIVA D

Para representar os números com dois algarismos diferentes, a partir do número 40, Vovô Eduardo precisou de 10 velinhas com os algarismos de 0 a 9. Para representar os números de dois algarismos repetidos (os números 44, 55, 66 e 77), ele precisou comprar mais 4 velinhas com os algarismos de 4 a 7. Portanto, ele precisou comprar, até agora, $10 + 4 = 14$ velinhas.

8. ALTERNATIVA C

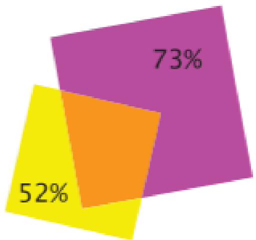
Vamos chamar de D a distância entre Pirajuba e Quixajuba. Qualquer que seja o combustível utilizado, temos $D = litros\ consumidos \times quilômetros\ por\ litro$. Isso mostra que as grandezas "litros consumidos" e "quilômetros por litro" são inversamente proporcionais (pois seu produto é constante). Desse modo, podemos escrever

$$\frac{litros\ consumidos\ na\ ida}{litros\ consumidos\ na\ volta}=\frac{15}{12}=\frac{5}{4}$$

Basta então achar uma fração equivalente a $\frac{5}{4}$ na qual a soma do numerador com o denominador seja 18. Essa fração é $\frac{10}{8}$; ou seja, João gastou 10 litros de álcool na ida e 8 litros de gasolina na volta. Logo a distância entre Pirajuba e Quixajuba é $12\times10 = 8\times15 = 120$ quilômetros.

9. ALTERNATIVA A

Vamos chamar de x e X, respectivamente, os lados do quadrado menor e do quadrado maior, e de Q a área comum aos dois quadrados. Então Q corresponde a $100 - 52 = 48\%$ da área do quadrado menor e a $100 - 73 = 27\%$ da área do quadrado maior. Seque que $\frac{48}{100}x^2 = \frac{27}{100}X^2$; logo $\left(\frac{x}{X}\right)^2 = \frac{27}{48} = \frac{9}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$, ou seja, $\frac{x}{X} = \frac{3}{4}$.



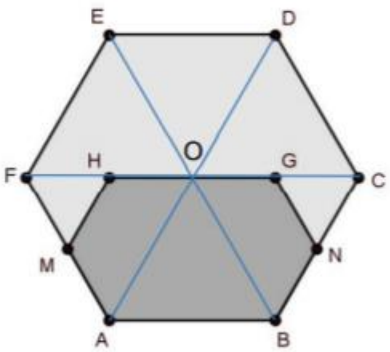
10. ALTERNATIVA D

O primeiro triângulo da sequência é formado por três palitos. Para $n \geq 2$, o triângulo que ocupa a posição n na sequência é formado acrescentando n triângulos iguais ao primeiro ao triângulo precedente. Logo, o total de palitos utilizados para construir o triângulo que ocupa a posição n na sequência é $3\cdot1 + 3\cdot2 + \cdots + 3n = 3\cdot(1 + 2 + \cdots + n) = \frac{3n(n+1)}{2}$. Para saber em qual triângulo foram usados 135 palitos, devemos resolver a equação $\frac{3n(n+1)}{2} = 135$, ou seja, $n(n + 1) = 90$. Por inspeção, vemos que a raiz positiva dessa equação é $n = 9$; logo o triângulo que estamos procurando é o nono triângulo da sequência, cujo lado tem 9 palitos.

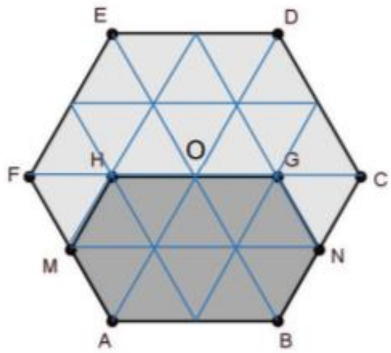
11. ALTERNATIVA E

As diagonais que ligam vértices opostos dividem o hexágono regular em seis triângulos equiláteros congruentes, com lado igual ao do hexágono. Por outro lado, os segmentos MH e GN determinam triângulos equiláteros FHM e CGN com lado igual à metade do lado do hexágono. Logo, a área de cada um destes dois triângulos é igual a $\frac{S}{4}$, sendo S a área dos triângulos equiláteros maiores. Assim, a razão entre as áreas dos hexágonos $ABNGHM$ e $ABCDEF$ é

$$\frac{3S - 2\frac{S}{4}}{6S} = \frac{5}{12}$$



Uma outra solução consiste em decompor o hexágono regular em 24 pequenos triângulos equiláteros congruentes e verificar que o hexágono cinza é formado por 10 de tais triângulos pequenos. Assim, a razão entre as áreas é $\frac{10}{24} = \frac{5}{12}$.

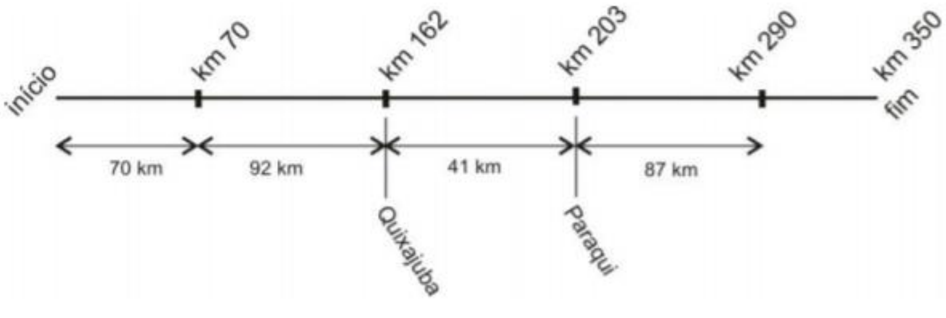


12. ALTERNATIVA E

Primeiro notamos que a afirmativa de Daniela é verdadeira, pois há apenas um culpado; logo a culpada não é Daniela. Se Bruno mentiu, então ele é culpado e Eduardo diz a verdade. Mas Eduardo disse que a culpada é uma menina, logo ele também estaria mentindo, o que não satisfaz o enunciado. Então Bruno diz a verdade e, portanto, Eduardo é o culpado.

13. ALTERNATIVA B

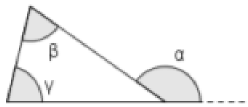
Na figura a seguir, admitimos que a estrada de 350 km começa à esquerda e termina à direita; também não faz diferença supor que Quixajuba esteja à esquerda de Paraqui.



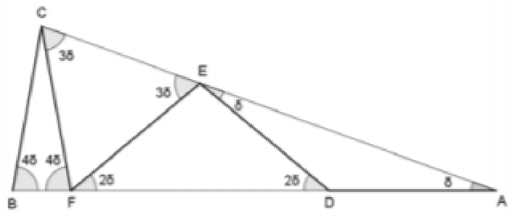
Vamos explicar como foi feita a figura. Notamos que Quixajuba não pode estar à esquerda do quilômetro 70, pois nesse caso ela estaria antes do início da estrada. Logo ela está à direita do quilômetro 70 e fica no quilômetro $70 + 92 = 162$ da estrada. Do mesmo modo vemos que Paraqui está à esquerda do quilômetro 270 e fica no quilômetro $290 - 87 = 203$. Portanto, a distância entre as duas cidades é $203 - 162 = 41$ quilômetros.

14. ALTERNATIVA C

Nesta solução vamos usar repetidamente o resultado de geometria elementar que diz que o ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes. Este resultado está ilustrado na figura ao lado e diz que $\alpha = \beta + \gamma$.

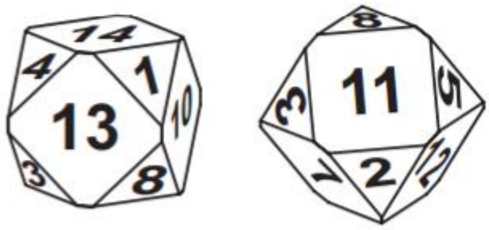


Vamos indicar por δ a medida do ângulo $B\hat{A}C$. Como o triângulo ADE é isósceles, temos $D\hat{E}A = \delta$. O ângulo $E\widehat{D}F$ é externo ao triângulo ADE, e pelo resultado mencionado acima temos $E\widehat{D}F = \delta + \delta = 2\delta$. Como o triângulo DEF é isósceles temos também $E\hat{F}D = 2\delta$; o ângulo $F\hat{E}C$, externo ao triângulo FEA, mede então $2\delta + \delta = 3\delta$. Analogamente, concluímos que $C\hat{B}A = 4\delta$, e como o triângulo ABC é isósceles segue que $B\hat{C}A = 4\delta$. Logo $180° = 4\delta + 4\delta + \delta = 9\delta$, donde $\delta\ =\ 20°$.



15. ALTERNATIVA E

Primeiro observamos que o sólido obtido depois dos cortes possui seis faces octogonais (de oito lados) e oito faces triangulares. Cada face octogonal é adjacente (isto é, tem uma aresta comum com) a três outras faces octogonais e oposta a outra face octogonal; além disso, cada face triangular é adjacente a três faces octogonais que são duas a duas adjacentes.



À esquerda vemos que a face octogonal 13 é adjacente às faces octogonais 14 e 10. À direita vemos que a face triangular 3 é adjacente às faces 7, 11 e 13; assim, as faces 11 e 7 também são adjacentes à face 13. Logo as quatro faces octogonais adjacentes à face 13 são as de números 7, 10, 11 e 14, e segue que a face oposta à face 13 é a de número 12.

16. ALTERNATIVA B

Mariana escreveu o algarismo 2:

- uma vez na fatoração de cada número par, isto é, 50 vezes;
- mais uma vez na fatoração de cada múltiplo de 4, isto é, outras 25 vezes;
- mais uma vez na fatoração de cada múltiplo de 8, isto é, outras 12 vezes;
- mais uma vez na fatoração de cada múltiplo de 16, isto é, outras 6 vezes;
- mais uma vez na fatoração de cada múltiplo de 32, isto é, outras 3 vezes;
- mais uma vez na fatoração de cada múltiplo de 64, ou seja, 1 vez;
- quando escreveu os números primos 23 e 29, ou seja, 2 vezes;
- quando escreveu 23 nas fatorações de 46, 69, 92 e quando escreveu 29 nas fatorações de 58 e 87, ou seja, 5 vezes.

No total, Mariana $50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 + 2 + 5 = 104$ vezes o algarismo 2.

17. ALTERNATIVA B

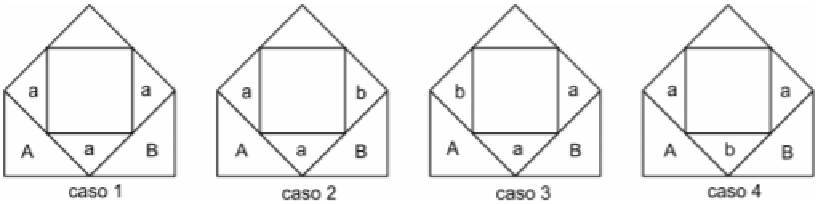
Os cubinhos que não têm nenhuma face pintada são os que ficam internos ao cubo maior. Eles fazem parte de um cubo de dimensões $(n-2)\times(n-2)\times(n-2)$, o que dá um total de $(n-2)^3$ tais cubinhos. Os que têm exatamente uma face pintada são os cubinhos das faces do cubo maior que não tocam suas arestas. Em cada face há $(n-2)^2$ desses cubinhos, o que dá um total de $6(n-2)^2$ cubinhos com exatamente uma face pintada. Logo, deve-se ter

$$(n-2)^3 = 6 \cdot (n-2)^2$$

Como $n\ >\ 2$, esta equação é equivalente a $n - 2 = 6$, cuja solução é $n\ =\ 8$.

18. ALTERNATIVA C

Primeiro pintamos o quadrado e o triângulo superior, o que pode ser feito de $3\times2=6$ maneiras diferentes. Uma vez isso feito, dividimos o problema em quatro casos de acordo com as cores dos triângulos menores da parte de baixo, como na figura.



As letras minúsculas a e b indicam cores diferentes; notamos que como o quadrado já foi pintado, para os três triângulos menores só restam duas cores disponíveis. As letras maiúsculas A e B servirão apenas para denotar os triângulos maiores no que segue.

• Caso 1: temos duas escolhas para a; uma vez feita essa escolha, podemos pintar A com duas cores, bem como B. Isso pode ser feito de $2\times2\times2=8$ maneiras diferentes.

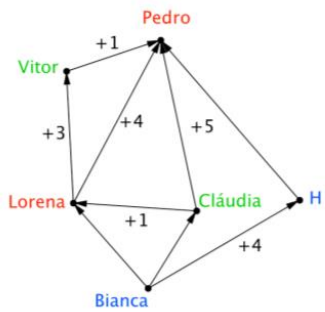
• Caso 2: temos duas escolhas para a e uma para b; feitas essas escolhas, podemos pintar A com duas cores e B com apenas uma. Isso pode ser feito de $2\times1\times2\times1=4$ maneiras diferentes.

• Caso 3: esse caso é idêntico ao caso 2.

• Caso 4: temos duas escolhas para a e uma para b; feitas essas escolhas, só há uma possibilidade para pintar A e B. Isso pode ser feito de $2\times1\times1\times1=2$ maneiras diferentes.

No total, temos $6\times(8+4+4+2)=6\times18=108$ maneiras diferentes de pintar a figura.

19. ALTERNATIVA C



Vamos representar as informações do enunciado no diagrama ao lado. Nele, a letra H indica o único homem cujo nome não aparece no enunciado. A flecha que vai de Cláudia a Pedro, indicada com $+5$, quer dizer que Pedro comprou 5 livros a mais que Cláudia, e analogamente para as outras flechas. As flechas que saem de Bianca para Lorena e Cláudia indicam que ambas compraram mais livros que Bianca. Mais abaixo vamos explicar as flechas que não correspondem a dados do enunciado.

Como Pedro comprou 5 livros a mais que Cláudia e cada homem comprou 4 livros a mais que sua esposa, segue que Pedro não é o marido de Cláudia. Por outro lado, Pedro comprou 5 livros a mais que Cláudia, que comprou mais livros que Bianca; logo Pedro não é o marido de Bianca, ou seja, ele é o marido de Lorena. Indicamos essa conclusão no diagrama colocando os nomes de Pedro e Lorena em vermelho e marcando a flecha que os liga com $+4$.

Como Pedro comprou 5 livros a mais que Cláudia e 4 livros a mais que Lorena, segue que Lorena comprou 1 livro a mais que Cláudia, o que nos dá a flecha que liga Cláudia a Lorena. As flechas que ligam Cláudia a Vítor passando por Lorena mostram que Vítor comprou 4 livros a mais que Cláudia; como Cláudia comprou mais livros que Bianca, segue que Vítor comprou pelo menos 5 livros a mais que Bianca. Logo Vítor não é o marido de Bianca, ou seja, ele é o marido de Cláudia; indicamos essa conclusão colocando seus nomes em verde. Logo Bianca é a mulher de H; assim, ligamos esses dois por uma flecha com $+4$ e colocamos seus nomes em azul.

Notamos ainda que Pedro comprou pelo menos 6 livros a mais que Bianca; como H comprou 4 livros a mais que Bianca, segue que Pedro comprou mais livros que H.

Finalmente, observamos que como Pedro comprou 4 livros a mais que Lorena e Vítor comprou 3 livros a mais que Lorena, segue que Pedro comprou 1 livro a mais que Vítor, conforme indicado. Podemos agora analisar as alternativas:

A) Falsa, pois Pedro comprou 1 livro a mais que Vítor.
B) Falsa, pois Pedro é o marido de Lorena.
C) Verdadeira, pois Pedro comprou mais livros que Vítor e que H.
D) Falsa, pois Lorena comprou um livro a mais que Cláudia.
E) Falsa, pois Vitor é marido de Cláudia.

20. ALTERNATIVA C

Sejam n um número enquadrado entre 10 e 100, a seu algarismo das dezenas e b seu algarismo das unidades; notamos que $1 \leq a \leq 9$ e $0 \leq b \leq 9$. Então $n = 10a + b$ e o número obtido invertendo-se os algarismos de n é $10b + a$. Como n é enquadrado temos que $(10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b = 11(a + b)$ é um quadrado perfeito.

Notamos primeiro que se $b = 0$ não é possível que $11(a + b)$ seja um quadrado perfeito, pois $11a$ nunca é um quadrado perfeito para a assumindo os valores de 1 a 9. Logo temos $b \neq 0$ (podemos também chegar a essa conclusão verificando diretamente que 10, 20, 30,..., 90 não são enquadrados). Com isso, vemos que $2 \leq a + b \leq 18$; dentre esses possíveis valores para $a + b$, o único que faz de $11(a + b)$ um quadrado perfeito é 11. Logo $a + b = 11$ e as possibilidades para n são então 29 e 92, 38 e 83, 47 e 74 e 56 e 65, num total de 8.